

## Tézy k ústnej maturitnej skúšky z matematiky

### Základy matematickej logiky

Definujte pojmy: výrok, hypotéza

Uveďte čo je pravdivostná hodnota výroku a ako sa zapisuje, čo je negácia výroku a ako ju označujeme.

Čo je zložený výrok? Vymenujte logické spojky, pomenujte základné zložené výroky. Čo je tautológia, kontradikcia a splniteľná výroková formula?

Napíšte tabuľku pravdivostných hodnôt zložených výrokov.

Zapíšte schematicky negáciu zložených výrokov. Dokážte vzťahy pre negáciu základných zložených výrokov.

Zapíšte schematicky implikáciu, obmenu implikácie a obrátenú implikáciu, napíšte tabuľku pravdivostných hodnôt týchto zložených výrokov. Ktorá dvojica sú výroky ekvivalentné (ekvivalentnosť dokážte)?

Čo sú kvantifikované výroky? Čo sú kvantifikátory? Schematicky zapíšte negáciu kvantifikovaných výrokov.

Čo je výroková forma?

### Množiny

Čo je množina, označenie množiny, prvky množiny. Ako môže byť množina určená (uvedte aj príklad).

Aká je to konečná a nekonečná množina, prázdna množina.

Vennove diagramy a intervaly – čo sú, na čo slúžia

Definujte základné typy vzťahov medzi dvoma množinami (rovnosť, podmnožina, vlastná podmnožina).

Definujte základné množinové operácie (zjednotenie, prienik, rozdiel, doplnok)

Aké sú to disjunktné množiny, čo je inklúzia?

Ako zapisujeme počet prvkov konečnej množiny? Uveďte vzorec pre počet prvkov zjednotenia dvoch množín.

## Číselné obory

Popíšte množiny prirodzených, celých, racionálnych iracionálnych a reálnych čísel, ich uzavretosť vzhľadom na niektoré početové operácie.

Čo je zlomok, zlomok v základnom tvare, akými spôsobmi možno zapísať racionálne čísla?

Čo je periodický rozvoj, perióda, predperióda? Popíšte ako vyzerá číselná os po znázornení obrazov racionálnych čísel.

Definujte absolútnu hodnotu reálneho čísla a jej geometrickú interpretáciu.

Komutatívnosť, asociatívnosť, distributívnosť (uved'te príslušné zákony a príklad).

Aký je vzťah medzi množinami  $R$ ,  $Z$ ,  $N$ ,  $Q$  ?

Čo je percento a čo promile? Na príklade vysvetlite ako sa počíta základ, počet percent a hodnota prislúchajúca danému počtu percent - percentová časť.

Čo platí pre priamo úmerné veličiny? Čo platí pre nepriamo úmerné veličiny? Čo je mierka mapy, čo vyjadruje?

Vysvetlite, ako sa počíta DPH.

## Teória čísel

Aké zápisy prirodzených čísel poznáte?(rozvinutý, číslicový, pomocou zvyškov pri delení)

Definujte deliteľ (násobok) prirodzeného čísla, spoločný deliteľ, spoločný násobok, najmenší spoločný násobok a najväčší spoločný deliteľ prirodzených čísel

Definujte súdeliteľné a nesúdeliteľné čísla, prvočísla a zložené čísla (aj príklady). Čo je prvočíselný rozklad a ako ho môžeme využiť?

Aká veta nám pomáha pri určovaní či je číslo prvočíslo alebo zložené číslo?

Uved'te znaky deliteľnosti 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 25, 50, 100 a na príkladoch ich vysvetlite.

## Dôkazy v matematike

Popíšte budovanie matematickej teórie. Čo je axióma, matematická veta?

Popíšte princíp metód dôkazov v matematike (priamy, nepriamy, sporom)

### **Algebraické výrazy**

Čo je algebraický výraz, definičný obor výrazu, hodnota výrazu. Definujte mnohočlen, členy mnohočlena, koeficienty a stupeň mnohočlena. Popíšte metódy rozkladu mnohočlenov na súčin. Definujte  $n$ -tú mocninu, definujte  $n$ -tú odmocninu nezáporného čísla. Vypíšte pravidlá pre počítanie s mocninami a odmocninami.

### **Rovnice a nerovnice**

Čo je rovnica, strany rovnice, neznáma. Aké sú to dôsledkové a ekvivalentné úpravy rovníc (aj ich vymenujte). Definujte lineárnu rovnicu a povedzte aké môže mať riešenie.

Definujte sústavu lineárnych rovníc a uveďte metódy jej riešenia. Definujte kvadratickú rovnicu, uveďte vzorec pre výpočet jej koreňov, uveďte vzťah medzi diskriminantom a počtom riešení kvadratickej rovnice. Ako rozkladáme kvadratického trojčlena na súčin koreňových činiteľov?

Popíšte rýdzo kvadratickú rovnicu, kvadratickú rovnicu bez absolútneho člena a ich riešenie. Definujte normovaný tvar kvadratickej rovnice, uveďte vzťah medzi koreňmi a koeficientmi kvadratickej rovnice (Vietove vzorce).

Čo je nerovnica, strany nerovnice, aké ekvivalentné úpravy nerovníc používame?

### **Funkcie**

Definujte funkciu na množine  $A$ , povedzte ako môže byť funkcia určená, čo je definičný obor funkcie, definujte obor hodnôt a graf funkcie. Definujte rastúcu, klesajúcu, nerastúcu a neklesajúcu funkciu, funkciu monotónnu a prostú.

Definujte inverznú funkciu, povedzte kedy existuje, ako vyzerá graf pôvodnej a inverznej funkcie, aký je vzťah medzi  $D(f)$  a  $H(f)$  pôvodnej inverznej funkcie, definujte funkciu zdola a zhora ohraničenú na množine  $M$ , funkciu zdola a zhora ohraničenú a funkciu ohraničenú, definujte maximum a minimum funkcie na množine  $M$ , periodickú a zloženú funkciu. Popíšte a vysvetlite na príklade vzťah medzi grafom funkcie a riešením príslušnej rovnice. Ak je daná funkcia  $f(x)$ , a poznáte jej graf, ako vyzerá graf funkcie  $|f(x)|$ ?

## Teoretická časť ústnej maturitnej skúšky z matematiky

Definujte lineárnu funkciu a jej vlastnosti, kvadratickú funkciu a jej vlastnosti. Definujte nepriamu úmernosť, jej vlastnosti a lineárne lomenú funkciu. Vysvetlite, čo sú asymptoty lineárne lomenej funkcie a aké sú ich rovnice. Načrtnite grafy týchto funkcií.

Definujte mocninové funkcie, odmocninovú funkciu a ich vlastnosti. Kedy, resp. na akom intervale existujú inverzné funkcie k mocninovým? Načrtnite grafy týchto funkcií. Definujte exponenciálnu a logaritmickú funkciu a ich vlastnosti, načrtnite ich grafy, definujte logaritmus. Nájdite príklad definičného oboru exponenciálnej funkcie tak, aby bola ohraničená. Čo je dekadický a prirodzený logaritmus, čo je eulerovo číslo? Dokážte vety o logaritmoch.

Definujte goniometrické funkcie a ich vlastnosti, načrtnite ich grafy. Napíšte tabuľku významných hodnôt goniometrických funkcií. Uveďte základné vzťahy medzi goniometrickými funkciami.

### Postupnosti

Čo je postupnosť, konečná a nekonečná postupnosť. Definujte  $n$ -tý člen postupnosti. Ako môže byť postupnosť určená? Graf postupnosti. Popíšte vlastnosti postupností: rastúca, klesajúca, monotónna, maximum a minimum postupnosti, zhora a zdola ohraničená postupnosť. Definujte aritmetickú a geometrickú postupnosť, uveďte vzorce pre  $n$ -tý člen, súčet prvých  $n$  členov a vzťah medzi  $r$ -tým a  $s$ -tým členom postupnosti. Uveďte vzorec pre pravidelný rast a pokles a vysvetlite ho.

### Základy planimetrie

Vymenujte základné pojmy geometrie (tie, ktoré sa nedefinujú) a napíšte ako ich označujeme. Definujte opačnú polpriamku a úsečku. Definujte uhol (konvexný a nekonvexný), definujte konvexný geometrický útvar, načrtnite príklad nekonvexného geometrického útvaru. Ako rozdeľujeme uhly podľa veľkosti? Definujte susedné, vrcholové, súhlasné a striedavé uhly. Definujte kružnicový oblúk, stredový a obvodový uhol prislúchajúci danému kružnicovému oblúku. Vyslovte Thalesovu vetu.

## **Trojuholník**

Definujte trojuholník, popíšte jeho strany, vrcholy, vnútorné a vonkajšie uhly. Čo je trojuholníková nerovnosť? Uveďte vzťahy medzi stranami a vnútornými uhlami v trojuholníku. Rozdeľte trojuholníky podľa dĺžok strán a veľkostí vnútorných uhlov. Definujte stredné priečky (popíšte ich vlastnosti), ťažnice (vlastnosť ťažiska) a výšky v trojuholníku. Definujte a popíšte konštrukciu kružnice opísanej trojuholníku a kružnice vpísanej do trojuholníka. Dokážte, že súčet vnútorných uhlov trojuholníka je  $180^\circ$ . Uveďte Talesovu vetu. Uveďte Pytagorovu vetu (aj načrtnite) a dokážte ju. Uveďte vzorce na výpočet obvodu a obsahu trojuholníka.

Definujte goniometrické funkcie ostrého uhla (v pravouhlom trojuholníku). Uveďte sínusovú a kosínusovú vetu a vzorec na výpočet obsahu trojuholníka, ak nepoznáme výšku. Uveďte a vysvetlite Euklidove vety.

## **Mnohouholníky**

Definujte konvexný a nekonvexný mnohouholník, definujte pravidelný mnohouholník, uveďte vzorec na výpočet súčtu vnútorných uhlov konvexného  $n$ -uholníka. Definujte štvoruholník (aj tetivový a dotyčnicový), rovnobežník. Popíšte vlastnosti rovnobežníka, špeciálne definujte a popíšte vlastnosti štvorca, obdĺžnika, kosoštvorca a kosodĺžnika (strany – dĺžky, kolmosť, uhly, uhlopriečky), uveďte vzorce na výpočet ich obvodov a obsahov. Definujte lichobežník a jeho špeciálne prípady (pravouhlý, rovnoramenný) a ich vlastnosti (strany, uhly, uhlopriečky).

## **Kruh, kružnica**

Definujte kružnicu, kruh, ich polomer a priemer, tetivu kružnice. Definujte kruhový výsek a odsek. Popíšte vzájomné polohy kružnice a priamky a vzájomné polohy dvoch kružníc. Čo je medzikružie? Uveďte vzorce na výpočet obvodu a obsahu kruhu. Odvoďte vzorec na výpočet obsahu kruhového výseku. Vysvetlite, ako by ste vypočítali dĺžku kružnicového oblúka, prislúchajúceho danému stredovému uhlu

### **Konštrukčné úlohy**

Vymenujte množiny bodov s danou vlastnosťou (kružnica, os úsečky, os uhla, ekvidištanta priamky a kružnice, os pásu, Thalesovu kružnicu) a objasnite na náčrtoch. Z akých častí pozostáva konštrukčná úloha?

### **Zhodnosť a podobnosť**

Kedy sú geometrické útvary zhodné? Vyslovte vety o zhodnosti trojuholníkov. Kedy sú geometrické útvary podobné? Čo je koeficient podobnosti? Vyslovte vety o podobnosti trojuholníkov.

Definujte zhodné zobrazenie, orientovanú úsečku a orientovaný uhol, samodružný bod (útvár). Definujte stredovú a osovú súmernosť, posunutie a otočenie. Popíšte rôzne možnosti a výsledky zloženia dvoch osových súmerností. Rozoberte vzor a obraz bodu, priamky a trojuholníka v jednotlivých zhodných zobrazeniach.

### **Kombinatorika**

Čím sa zaoberá kombinatorika? Uveďte kombinatorické pravidlo súčtu a kombinatorické pravidlo súčinu. Čo sú a ako sa počítajú permutácie, variácie (bez a s opakovaním), kombinácie? Čo je kombinačné číslo a aké sú vlastnosti kombinačných čísel? Uveďte niekoľko riadkov Pascalovho trojuholníka a na čo môže slúžiť?

### **Pravdepodobnosť**

Čo je pravdepodobnosť, náhodný pokus (jav), nemožný a istý jav, jav opačný k javu A (doplnkovú udalosť)? Definujte pravdepodobnosť udalosti A. Uveďte vlastnosti pravdepodobnosti, pravdepodobnosť istej, nemožnej udalosti, pravdep. doplnkovej udalosti. Ako vypočítame pravdep. zjednotenia a prieniku? Aké sú to nezávislé udalosti?

### **Štatistika**

Čo je štatistika, štatistický súbor, štatistická jednotka, rozsah štat. súboru, štat. znak? Ako rozdeľujeme štatistické znaky? Čo je absolútna a relatívna početnosť znaku? Popíšte proces

## Teoretická časť ústnej maturitnej skúšky z matematiky

štatistického zisťovania. Definujte aritmetický priemer, modus, medián, rozptyl, smerodajnú odchýlku a variačný koeficient. Akým spôsobom graficky znázorňujeme štatistické údaje?

### Stereometria

Vysvetlite vlastnosti voľného rovnobežného premietania pri zobrazovaní kocky (kvádra).

Definujte rez telesa rovinou. Popíšte vzájomné polohy dvoch priamok v priestore, vzájomné polohy priamky a roviny a dvoch rovín. Akú vlastnosť majú priesečnice roviny s dvoma rovnobežnými rovinami a ako môžu vyzeráť priesečnice troch rôznobežných rovín?

Objasnite a prakticky ukážte pojmy: kolmý priemet bodu do roviny, kolmý priemet priamky do roviny, uhol dvoch priamok, uhol priamky s rovinou, uhol dvoch rovín. Vyslovte kritérium kolmosti dvoch rovín. Ako meriame vzdialenosť dvoch bodov, bodu od priamky a roviny a vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok (rovín)?

### Objemy a povrchy telies

Čo je teleso, mnohosten, kocka? Popíšte (steny, hrany, podstavy, vrcholy, výšky, strana kužeľa) hranol, kváder, ihlan, štvorsten, guľu, valec a kužeľ a uveďte vzorce na výpočet ich povrchov a objemov. Vysvetlite a ukážte rotáciou akých geometrických útvarov vznikne rotačný valec a rotačný kužeľ. Načrtnite aspoň dve siete pravidelného štvorbokého ihlana, jednu sieť kocky, kvádra, pravidelného šesťbokého hranola.

### Analytická geometria

Čím je daná karteziánska sústava súradníc na priamke a v rovine? Objasnite pojmy súradnice bodu, orientovaná úsečka. Ako vypočítame veľkosť orientovanej úsečky? Ako nájdeme súradnice jej stredu? Vysvetlite, čo je vektor, umiestnenie vektora, súradnice vektora.

Definujte operácie s vektormi (súčet, rozdiel, reálny násobok, skalárny súčin. Ako vypočítame veľkosť vektora a uhol dvoch vektorov? Definujte parametrické rovnice priamky v rovine. Čo je smerový vektor a normálový vektor? Napíšte všeobecnú rovnicu priamky v rovine, smernicový tvar rovnice priamky. Čo je smernica a čo vyjadruje, aký je vzťah medzi smernicami rovnobežných priamok? Ako vypočítame vzdialenosť dvoch bodov v rovine a uhol dvoch priamok v rovine? Napíšte všeobecnú rovnicu kružnice v rovine a stredový tvar rovnice kružnice v rovine.

### Dôkazové úlohy na nácvik spôsobov argumentácie

1)

- a) Odvodte vzorec pre výpočet koreňov kvadratickej rovnice.  
b) Odvodte vzťah medzi koreňmi  $x_1, x_2$  a koeficientmi  $a, b, c$  kvadratickej rovnice  
 $ax^2 + bx + c = 0$

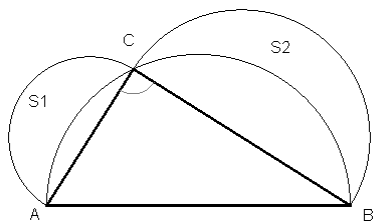
2) Dokážte, že

- a) V každom trojuholníku sa vonkajší uhol pri jednom vrchole rovná súčtu vnútorných uhlov pri zvyšných dvoch vrchoch.  
b) Súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov každého konvexného  $n$ -uholníka sa rovná  $(n - 2) \cdot 180^\circ$ .  
c) V každom trojuholníku sa súčet veľkostí všetkých vnútorných uhlov rovná  $180^\circ$ .

3) Dokážte, že pre súčet ťažníc  $t_a, t_b, t_c$  trojuholníka ABC platí nerovnosť

$$t_a + t_b + t_c > \frac{1}{2}(a + b + c), \text{ kde } a, b, c \text{ sú strany trojuholníka ABC.}$$

4) Dokážte, že súčet obsahov  $S_1, S_2$  tzv. Hippokratových mesiačikov, t.j. obrazcov ohraničených oblúkmi polkružníc, ktoré sú zostrojené nad stranami pravouhlého trojuholníka ABC v polrovine ABC, sa rovná obsahu  $S$  trojuholníka ABC.



5) Rotačný kužeľ vznikol rotáciou rovnostranného trojuholníka so stranou dĺžky  $a$ , okolo jeho výšky. Odvodte vzorec na výpočet objemu tohto kužeľa a vzorec na výpočet jeho povrchu pomocou strany  $a$  pôvodného trojuholníka.

6) Odvodte vzťah medzi stredovým a obvodovým uhlom v kružnici.

7) Dokážte nerovnosť medzi geometrickým a aritmetickým priemerom dvoch kladných reálnych čísel  $a, b$  :

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a + b}{2}.$$



8)

- a) Dokážte, že pre všetky  $n \in \mathbb{N}$  platí  $2 \mid n^2 - 3n$ .
- b) Dokážte, že ak je prirodzené číslo nepárne, tak aj jeho druhá mocnina je nepárna.
- c) Dokážte, že  $\forall n \in \mathbb{N} : 3 \mid n^2 \Rightarrow 3 \mid n$
- d) Dokážte, že pre každé  $n \in \mathbb{N}$  platí: Ak 5 delí  $(n^2 + 6) \Rightarrow 5$  nedelí  $n$ .

9) Dokážte, že funkcia  $f: y = \frac{-2}{3-x}$  je klesajúca na intervale  $(-\infty, 3)$  ako aj na intervale  $(3, \infty)$

10) Vo vnútri trojuholníka ABC zostrojte ľubovoľný bod M. Dokážte, že

$$|\angle AMB| > |\angle ACB|$$

11) Dokážte, že pre každé  $n \in \mathbb{N}$  platí: ak 5 delí  $n^2 + 6 \Rightarrow 5$  nedelí  $n$ .

12) Daná je kocka ABCDEFGH. Dokážte, že priamky EC a BG sú na seba kolmé.

13) Odvodte vzorec pre výpočet obsahu trojuholníka pomocou dvoch strán a uhla nimi zovretého.

14) Dokážte pravdivosť výroku  $\log_{10} 12 > \log_{0,3} 12$

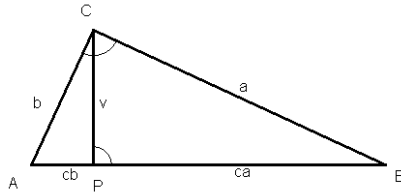
15) Dokážte, že funkcia  $f: y = \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{2}$  nie je prostá.

16) Dokážte, že platia vzťahy  $\binom{n+1}{2} + \binom{n+2}{2} = (n+1)^2$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

17) Dokážte Euklidove vety o odvesnách a o výške

Pr. Dokážte, že pre každý pravouhlý trojuholník ABC s pravým uhlom pri vrchole C platí:  $|CP|^2 = |AP| \cdot |BP|$ , kde P je päta výšky na stranu c.



18) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo  $n$  platí, že číslo 3 je deliteľom čísla  $n^3 + 2n$ .

19) Dokážte, že spojnica bodov vyznačujúcich na ciferníku hodín 3 a 6, je kolmá na spojnicu bodov 4 a 11.

20) Ktoré z nasledujúcich čísel  $a, b, c$  sú racionálne? Dokážte a vysvetlite postup konštrukcií ich obrazov na číselnej osi:  $a = 0,8$ ;  $b = 0,25$ ;  $c = \sqrt{2}$ .

21) Zistite, pre ktoré  $p \in \mathbb{R}$  je funkcia  $f: y = \frac{1-2x}{p+2}$  rastúca a pre ktoré  $p \in \mathbb{R}$  klesajúca.

22) Daná je kocka ABCDEFGH,  $|AB| = a = 5$  cm. M je stred EF, U je stred DH, T je stred CG. Dokážte, že vzdialenosť bodu M od roviny UTA je  $2 \cdot \sqrt{5}$  cm.

23) Daný je rovnoramenný trojuholník ABC so základňou AB. Na polpriamke AC je daný bod D tak, že C je stred úsečky AD. Dokážte, že trojuholník ABD je pravouhlý s pravým uhlom pri vrchole B.

24) Odvodte vzorec pre počet všetkých uhlopriečok v konvexnom  $n$ -uholníku pomocou počtu strán. Dokážte, že existuje jediný taký konvexný  $n$ -uholník, ktorý má rovnaký počet uhlopriečok ako strán.

25) Dokážte, že pre kocku ABCDEFGH platí: rovina ACH je rovnobežná s rovinou EGB.

26) Na hrane HG kocky ABCDEFGH je daný bod U,  $|HU|:|UG| = 3:1$ . Zostrojte rez kocky rovinou  $\sigma$ , ktorá prechádza bodom U rovnobežne s rovinou  $\overleftrightarrow{ACH}$  a dokážte, že obvod rezu v závislosti od  $a = |AB|$  je  $3 \cdot \sqrt{2} \cdot a$ .

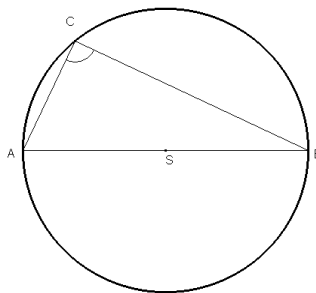
27) Odvodte vzorec pre súčet prvých  $n$  členov aritmetickej postupnosti s diferenciou  $d$ .

28) Dokážte, že funkcia  $f: y = \frac{3}{2x-5}$  je prostá a určte k nej inverznú funkciu.

29) Dokážte sínusovú a kosínusovú vetu.

Teoretická časť ústnej maturitnej skúšky z matematiky

- 30) Dokážte: Ak A, B, C sú rôzne body kružnice, kde AB je priemer kružnice, potom uhol  $\angle ACB$  je pravý uhol. (Talesova veta).



- 31) Dokážte, že spomedzi všetkých pravouholníkov s obvodom 160 cm má maximálny obsah štvorec.
- 32) Dokážte Pytagorovu vetu.
- 33) Zistite, či možno zostrojiť taký konvexný mnohoúhelník, ktorého najmenší uhol má  $90^\circ$  a každý nasledujúci je o  $12^\circ$  väčší ako predchádzajúci.
- 34) Dokážte vety o logaritmoch.

$$\forall r > 0, s > 0, a > 0, a \neq 1: \log_a r \cdot s = \log_a r + \log_a s,$$

$$\forall r > 0, s > 0, a > 0, a \neq 1: \log_a \frac{r}{s} = \log_a r - \log_a s$$

$$\forall r \in R^+, s \in R, a > 0, a \neq 1: \log_a r^s = s \cdot \log_a r \quad (\text{Využite: } x = a^{\log_a x})$$

- 35) Daná je kocka ABCDEFGH, kde  $|AB| = a$ . Dokážte, že vzdialenosť bodu A od priamky HF je  $a\sqrt{\frac{3}{2}}$

$$\text{HF je } a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

- 36) Je daná kvadratická funkcia  $f: y = ax^2 + bx + c$ . Odvodte vzorec pre súradnice vrcholu  $V [v_1, v_2]$  paraboly, ktorá je jej grafom.
- 37) Odvodte vzorec pre objem a povrch pravidelného 4-bokého ihlanu, ak jeho hrana podstavy má dĺžku „a“ a uhol bočnej steny s rovinou podstavy je  $\varphi$ .
- 38) Dokážte, že prvočísel je nekonečne veľa
- 39) Sformulujte a dokážte kritériá deliteľnosti 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10 v obore prirodzených čísel.

**Pre riešenie príkladov využite teoretické poznatky z maturitných téz a cieľových požiadaviek na maturitnú skúšku**